Dann läßt sich das Minimumprinzip auf die reine Wärmeleitung, die elektrische Leitung und das gleichzeitige Auftreten von Transportphänomenen und chemischen Reaktionen ausdehnen[36]. Auch die Stabilität dieser stationären Zustände minimaler Entropieerzeugung läßt sich nachweisen[36]. Bezüglich der chemischen Reaktionen gelten die gleichen Einschränkungen wie oben.

Herrn Prof. J. Meixner danke ich für wertvolle Diskussionen und Herrn Prof. E. Jenckel dafür, daß er die Durchführung dieser Arbeit in seinem Institut ermöglicht hat.

Spinortheorie der Elementarteilchen I

(Grundlagen der modifizierten Theorie)

Von Ferdinand Cap

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Innsbruck

(Z. Naturforschg. **8a**, 740—744 [1953]; eingegangen am 4. September 1953)

Während die übliche Spinortheorie der Elementarteilchen mit mehr als $2(2s+1)$ Spinorkomponenten arbeitet und Spinoren mit punktierten und unpunktierten Indices verwendet werden, begnügt sich die hier vorgeschlagene Theorie mit $2(2s+1)$ Spinorkomponenten, herrührend von Spinoren, die nur eine Indexsorte besitzen und Differentialgleichungen 2. Ordnung genügen. Es wird zunächst über die übliche Theorie referiert und der Grundgedanke der neuen Theorie wird herausgearbeitet.

Betrachtet man die heutige Theorie der Elementarteilchen[1], so kann man sich des Eindrucks nicht erwehren, daß die Anzahl der Komponenten der Wellenfunktion, die für die Beschreibung eines bestimmten Teilchens herangezogen wird, nicht übereinstimmt mit den physikalischen Möglichkeiten eines Elementarteilchens. Es ist doch so, daß ein bestimmtes Elementarteilchen zwei Freiheitsgrade besitzt: Ladung und Spin. Die Ladung kann die Zustände positiv elektrisch und negativ elektrisch annehmen; der Spinfreiheitsgrad hat beim Spin s bekanntlich die Einstellmöglichkeiten $s, s-1, s-2, \ldots, -(s-2), -(s-1), -s$, also insgesamt $2s+1$ Möglichkeiten. Zusammen mit den durch den Ladungsfreiheitsgrad gegebenen zwei Möglichkeiten sind dies $2(2s+1)$ durch Messung voneinander scharf zu unterscheidende physikalische Zustände (Tab. 1).

Name des Teilchens	Spin s	Zahl der Zustände
skalares Meson	0	2
Lepton[2]	1/2	4
vektorielles Meson	1	6
3/2-Teilchen	3/2	8
Graviton	2	10
5/2	5/2	12
3	3	14

Tab. 1.

Beim Leptonfeld beispielsweise kann man ein Elektron mit „aufwärts" und eines mit „abwärts" gerichtetem Spin, ein Positron mit „aufwärts" und eines mit „abwärts" gerichtetem Spin unterscheiden. Es hat sich nun aus Gründen der einfachen Rechenweise in der Physik eingebürgert, einen Vorgang mit z physikalisch voneinander unterscheidbaren Freiheitsgraden durch z-komponentige mathematische Größen zu beschreiben. So wird z. B. die Bewegung eines starren Körpers, die bekanntlich 6 Freiheitsgrade besitzt, durch 6 Größen — Geschwindigkeitsvektor der Schwerpunktstranslation und Winkelgeschwindigkeit um den Schwerpunkt — dargestellt. Weniger Komponenten würden den Vorgang nicht vollkommen beschreiben — mehr Komponenten wären formal einführbar, physikalisch aber sinnlos und würden zusätzliche Nebenbedingungen erfordern (mit deren Hilfe die überflüssigen Komponenten eliminiert werden könnten).

Die heutige Theorie der Elementarteilchen arbeitet aber nach einem solchen Schema — es werden weitaus mehr Komponenten verwendet als physi-

[1] G. Wentzel, Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder, Deuticke-Verlag, Wien 1943; L. de Broglie, Théorie Générale des Particules à Spin, Gauthier-Villars-Verlag, Paris 1943.

[2] F. Cap, Acta physica austriaca, **6**, 35 [1952], s. dort Zitate aus Physic. Rev.

kalisch nötig sind; die überzähligen Komponenten werden dann noch zusätzlichen Nebenbedingungen unterworfen, können aber in den meisten Fällen nicht mehr völlig eliminiert werden.

Die Gründe für dieses Verfahren sind mehrfach:

1. kann man es so erreichen, daß dann die das Elementarteilchen beschreibenden Wellenfunktionen einer Differentialgleichung 1. Ordnung in Matrixform (z. B. Dirac-Gleichung, Kemmer-Gleichung[3]) genügen, so daß eine Wahrscheinlichkeitsdeutung der Wellenfunktionen möglich wird (zumindest für das „Einkörperproblem").

2. erzwingt die geforderte relativistische Invarianz der Theorie die Verwendung von Spinoren[4], deren Komponentenanzahl einem bestimmten Gesetz gehorcht.

Nun ist aber bekannt, daß sich die Wahrscheinlichkeitsdeutung der Wellenfelder gar nicht konsequent durchführen läßt — die Kemmer-Gleichung ergibt höchstens für das Einzelteilchen physikalisch vernünftige Aussagen und die der de Broglie-Proca-Gleichung[5] gehorchenden Funktionen bilden gar keine positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte[1].

Wenn wir daher diese Wellenfelder — ähnlich dem Maxwell-Feld — als physikalisch echte Felder (die sogar meßbar sind — bzw. sein müßten —, wenn das zugehörige Elementarteilchen elektrisch ungeladen ist) ansehen, fällt jeder Anlaß weg, Differentialgleichungen erster Ordnung zu verwenden. Verf. hat daher bereits 1949 in einem wissenschaftlichen Vortrag die Hypothese aufgestellt, daß es ganz allgemein möglich sein müsse, die ein Elementarteilchen nach der heutigen Theorie beschreibenden Spinorkomponenten in ihrer Anzahl auf $2\,(2s+1)$ komplexe Komponenten zu reduzieren und daß die so reduzierte Theorie der physikalischen Wirklichkeit gerecht werden müsse.

In einer folgenden Arbeit[6] soll gezeigt werden, wie ganz allgemein in relativistisch invarianter Weise die Elimination der „überflüssigen" Spinorkomponenten vorgenommen werden kann.

Das Ergebnis, daß $2\,(2\,s+1)$ komplexe Spinorkomponenten für die exakte und relativistisch invariante Beschreibung eines Elementarteilchens vom Spin s tatsächlich auslangen, sei vorweggenommen; der Beweis wird später nachgetragen werden[7].

Die übliche Spinortheorie der Elementarteilchen

Es zeigt sich[8], daß das Elementarteilchen vom Spin s durch zwei Spinoren vom Rang $r = 2s$ dargestellt werden kann. Wir bezeichnen diese mit

$$a^{\dot\mu_1 \dot\mu_2 \dots \dot\mu_M}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N}, \qquad b^{\dot\mu_0 \dot\mu_1 \dot\mu_2 \dots \dot\mu_M}_{\nu_2 \dots \nu_N}.$$

Da somit $M+N$ gleich der Gesamtzahl der Indizes, also gleich dem Spinorrang r ist, gilt

$$r = M + N = 2s. \tag{1}$$

Außerdem gilt

$$\text{für } \textit{ganzzahligen} \text{ Spin } s\colon \quad M = N = s, \tag{2}$$

$$\text{für } \textit{halbzahligen} \text{ Spin } s\colon \quad M = s - \frac{1}{2}, \tag{3}$$

$$N = s + \frac{1}{2}. \tag{3'}$$

Wie man sich leicht überzeugt, besitzt ein Spinor vom Rang $2s$ allgemein

$$f = 2^{2s} = 2^r \tag{4}$$

Komponenten. Aus physikalischen Gründen[8] müssen diese Spinoren vollsymmetrisch sein, es tritt also eine Verminderung der Komponentenzahl ein — diese reicht allerdings noch nicht aus, um auf $2\,(2s+1)$ Komponenten zu kommen.

Verlangt man von den Spinoren a und b volle Symmetrie, so sieht man, daß deren Komponentenzahlen sich wie folgt reduzieren:

$$\text{für } a \qquad f_a = (M+1)\,(N+1), \tag{5}$$

$$\text{für } b \qquad f_b = N\,(M+2), \tag{6}$$

$$\text{wo} \quad g \equiv f_a + f_b = 2\,MN + M + 3N + 1. \tag{7}$$

[3] N. Kemmer, Proc. Cambr. Philos. Soc. vom 22. 6. 1939.

[4] B. D. van der Waerden, Göttinger Nachrichten, **1929**, 100; s. auch: Derselbe, Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Springer-Verlag, Berlin 1932; Laporte-Uhlenbeck, Physic. Rev. **37**, 1380 [1931]; H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Hirzel-Verlag, Leipzig 1928; E. Cartan, Leçons sur la Théorie des Spineurs, Hermann-Verlag, Paris 1938; P. Urban u. F. Schwarzl, Acta physica austrica, **4**, 380 [1950].

[5] L. de Broglie, Mécanique ondulatoire du Photon, Gauthier-Villars-Verlag, Paris 1949.

[6] H. Donnert, Spinortheorie der Elementarteilchen II, Z. Naturforschg. **8a**, 745 [1953].

[7] F. Cap, Spinortheorie der Elementarteilchen III, Z. Naturforschg. **8a**, 748 [1953].

[8] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **155**, 447 [1936]; M. Fierz, Helv. physica Acta, **12**, 3 [1939] und andere.

Die Summe g ist also die Anzahl der in der heute üblichen Theorie verwendeten Komponentenzahl. Im einzelnen gilt Tab. 2, wenn

$$p = 2\,(2s+1)\,. \tag{8}$$

Man vergleiche die Werte von p mit g; es gilt stets $g \geq p$; das Gleichheitszeichen bei $s = 0$ und $1/2$ zeigt die Erfüllung der hier aufgestellten Hypothese durch die heutige Theorie bei diesen Teilchen an.

fasser aber nur p Gleichungen für p unbekannte Funktionen angesehen.

Die in den Gln. (10) und (11) auftretenden Spinoren $\partial^{\dot\mu\nu}$ und $\partial_{\dot\mu\nu}$ sind Differentialoperatoren. Bekanntlich kann man ja jeden Vierervektor in einen Spinor 2. Ranges mit einem punktierten und einem unpunktierten Index verwandeln; es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i = \frac{1}{2}\,\sigma_i^{\dot\mu\nu}\,\partial_{\dot\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\sigma_{i\dot\mu\nu}\,\partial^{\dot\mu\nu} \tag{12}$$

s	N	M	r	f	$2f$	f_a	f_b	g	p	q	m
0	0	0	0	1	2	1	1*	2	2	0	2
1/2	1	0	1	2	4	2	2	4	4	0	4
1	1	1	2	4	8	4	3	7	6	1	9
3/2	2	1	3	8	16	6	6	12	8	4	20
2	2	2	4	16	32	9	8	17	10	15	47
5/2	3	2	5	32	64	12	12	24	12	40	104
3	3	3	6	64	128	16	15	31	14	79	207
(ohne Symmetrie)						(mit voller Symmetrie)					

* Da ein Skalar keinerlei Symmetrieeigenschaften besitzt, versagt für $s = 0$ Gl. (6), ebenso die Gleichung für q.

Tab. 2.

Die $2f$ Funktionen gehorchen den die Symmetrie der beiden Spinoren ausdrückenden $2f - g = 2^{2s+1} - g$, mit (1) $2^{2s+1} - 2N(M+1) - (2s+1)$ Nebenbedingungen der Art

$$\varepsilon_{\dot\mu_I\dot\mu_J}\, a^{\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_M}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_N}\,, \qquad \varepsilon_{\dot\mu_I\dot\mu_J} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$
$$\varepsilon^{\nu_I\nu_J}\, a^{\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_M}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_N}\,, \qquad \varepsilon^{\nu_I\nu_J} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \tag{9}$$

und außerdem den $2f = 2^{2s+1}$ linearen homogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung von Dirac[8]:

$$\partial^{\dot\mu_0\nu_1}\, a^{\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_M}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_N} - i\,\frac{mc}{\hbar}\, b^{\dot\mu_0\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_M}_{\nu_2\ldots\nu_N} = 0\,, \tag{10}$$

$$\partial_{\dot\mu_0\nu_1}\, b^{\dot\mu_0\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_M}_{\nu_2\ldots\nu_N} - i\,\frac{mc}{\hbar}\, a^{\dot\mu_1\dot\mu_2\ldots\dot\mu_M}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_N} = 0\,. \tag{11}$$

Wir verfügen also insgesamt über $m \equiv q + 2f = 2^{2s+2} - 2N\,(M+1) - (2s+1)$ Gleichungen für die $2f$ Funktionen, wo $m > 2f \geq g \geq p$. Von den $2f$ Feldgleichungen sind allerdings infolge der Nebenbedingungen q Gleichungen identisch erfüllt, so daß von den m Gleichungen $2f$ Gleichungen für $2f$ Funktionen, bzw. $2f - q = g$ Feldgleichungen für die g Funktionen verbleiben; dies ist die heute übliche Theorie. Als physikalisch sinnvoll werden vom Verfasser aber nur p Gleichungen für p unbekannte Funktionen angesehen.

und umgekehrt

$$\partial_{\dot\mu\nu} = \varrho^i_{\dot\mu\nu}\,\partial_i\,;\quad \partial^{\dot\mu\nu} = \varrho^{i\dot\mu\nu}\,\partial_i \tag{13}$$

mit $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = i\,c\,t$ und dem metrischen Tensor g_{mn} ($= 1$ für $m = n$, 0 für $m \neq n$), wo die Matrizen σ und ϱ definiert sind durch

$$\sigma_i^{\dot\mu\nu} = \sigma^{i\dot\mu\nu} = -\varrho_i^{\dot\mu\nu} = -\varrho^{i\dot\mu\nu}:$$
$$\sigma_1 = \sigma^1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \sigma^2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \tag{14a}$$
$$\sigma_3 = \sigma^3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad \sigma_4 = \sigma^4 = \begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix};$$

$$\sigma'_{i\dot\mu\nu} = \sigma'^i_{\dot\mu\nu} = -\varrho_{i\dot\mu\nu} = -\varrho^i_{\dot\mu\nu}:$$
$$\sigma'_1 = \sigma'^1 = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \sigma'_2 = \sigma'^2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \tag{14b}$$
$$\sigma'_3 = \sigma'^3 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \sigma'_4 = \sigma'^4 = \begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}.$$

Führen wir auch für den Koordinatenvierervektor x_i einen Spinor ein, so gelangen wir zu Spinorkoordinaten $x_{\dot\mu\nu}$ bzw. $x^{\dot\mu\nu}$, die definiert sind durch:

$$x^{\dot\mu\nu} = \varrho_i^{\dot\mu\nu}\,x_i\,, \tag{15}$$

$$x_{\dot\mu\nu} = \varrho_{i\dot\mu\nu}\,x_i\,. \tag{16}$$

Die Umkehrung lautet:

$$x_i = \frac{1}{2}\,\sigma^{i\dot\mu\nu}\,x_{\dot\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\sigma^i_{\dot\mu\nu}\,x^{\dot\mu\nu}\,. \tag{17}$$

Führt man diese Spinorkoordinaten in den Differentiationsvektor ein, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial x^{\dot\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\,\partial_{\dot\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\sigma^{i}{}_{\dot\mu\nu}\,\partial_i = -\frac{1}{2}\,\varrho^{i}{}_{\dot\mu\nu}\,\partial_i\,, \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{\dot\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\,\partial^{\dot\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\sigma^{i\dot\mu\nu}\,\partial_i = -\frac{1}{2}\,\varrho^{i\dot\mu\nu}\,\partial_i \tag{19}$$

bzw.

$$\partial_i = -\sigma_i{}^{\dot\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\dot\mu\nu}} = -\sigma_{i\dot\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\dot\mu\nu}} \quad \text{usw.} \tag{20}$$

Die zu (10) und (11) konjugiert komplexen Gleichungen lauten:

$$\partial^{\mu_0\dot\nu_1}\,\bar a^{\mu_1\ldots\mu_M}_{\dot\nu_1\ldots\dot\nu_N} + i\,\frac{mc}{\hbar}\,\bar b^{\mu_0\mu_1\ldots\mu_M}_{\dot\nu_2\ldots\dot\nu_N} = 0\,, \tag{21}$$

$$\partial_{\mu_0\dot\nu_1}\,\bar b^{\mu_0\mu_1\ldots\mu_M}_{\dot\nu_2\ldots\dot\nu_N} + i\,\frac{mc}{\hbar}\,\bar a^{\mu_1\ldots\mu_M}_{\dot\nu_1\ldots\dot\nu_N} = 0\,. \tag{22}$$

Die Gln. (10), (11), (21) und (22) sind gegen eigentliche Lorentz-Transformationen invariant. Bei Lorentz-Spiegelung gehen sie in folgende Gleichungen über:

a) für *Fermionen*:

$$a^{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_M}_{\nu_1\ldots\nu_N} \to i^{(-2s)}\, b^{\dot\mu_0\ldots\dot\mu_M}_{\nu_2\ldots\nu_N}\,, \tag{23}$$

$$b^{\dot\mu_0\dot\mu_1\ldots\dot\mu_M}_{\nu_2\ldots\nu_N} \to i^{(-2s)}\, a^{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_M}_{\nu_1\ldots\nu_N} \tag{24}$$

wegen $M = s - \frac{1}{2}$, $N = s + \frac{1}{2}$, so daß die Feldgln. (10, (11), (21) und (22) in sich selbst übergehen.

b) für *Bosonen*:

$$a^{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_M}_{\nu_1\ldots\nu_N} \to i^{(-2s)}\, a^{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_M}_{\nu_1\ldots\nu_N}\,, \tag{25}$$

$$b^{\dot\mu_0\dot\mu_1\ldots\dot\mu_M}_{\nu_2\ldots\nu_N} \to i^{(-2s)}\, b^{\dot\mu_2\ldots\dot\mu_M}_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_N} \tag{26}$$

und wiederum

$$b^{\dot\mu_2\ldots\dot\mu_M}_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_N} \to i^{(-2s)}\, b^{\dot\mu_0\dot\mu_1\ldots\dot\mu_M}_{\nu_2\ldots\nu_N} \tag{27}$$

wegen $M = N = s$, so daß (10), (11) übergehen in:

$$\partial_{\dot\mu_1\nu_0}\, a^{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_M}_{\nu_1\ldots\nu_N} - i\,\frac{mc}{\hbar}\, b^{\dot\mu_2\ldots\dot\mu_M}_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_N} = 0\,, \tag{28}$$

$$\partial^{\dot\mu_1\nu_0}\, b^{\dot\mu_2\ldots\dot\mu_M}_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_N} - i\,\frac{mc}{\hbar}\, a^{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_M}_{\nu_1\ldots\nu_N} = 0; \tag{29}$$

(21) und (22) in die dazu konjugiert komplexen Gleichungen:

$$\partial_{\mu_1\dot\nu_0}\,\bar a^{\mu_1\ldots\mu_M}_{\dot\nu_1\ldots\dot\nu_N} + i\,\frac{mc}{\hbar}\,\bar b^{\mu_2\ldots\mu_M}_{\dot\nu_0\dot\nu_1\ldots\dot\nu_N} = 0\,, \tag{30}$$

$$\partial^{\mu_1\dot\nu_0}\,\bar b^{\mu_2\ldots\mu_M}_{\dot\nu_0\dot\nu_1\ldots\dot\nu_N} + i\,\frac{mc}{\hbar}\,\bar a^{\mu_1\ldots\mu_M}_{\dot\nu_1\ldots\dot\nu_N} = 0\,. \tag{31}$$

Da heute allgemein die Feldgleichungen von Elementarteilchen aus einem Variationsprinzip

$$\delta \int \mathfrak{L}\, d\tau = 0 \tag{32}$$

abgeleitet werden, mag es interessant sein, die zu den Gln. (10) und (11) gehörenden Lagrange-Funktionen anzuschreiben. Dabei müssen wir wiederum die beiden Fälle von Fermionen und Bosonen unterscheiden.

Die Variationen ergeben sich nach folgender Gleichung:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi} - \partial^{\dot\kappa\lambda}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial^{\dot\kappa\lambda}\psi)} - \partial_{\pi\dot\tau}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_{\pi\dot\tau}\psi)} = 0\,, \tag{33}$$

wo in einer Variationsgleichung immer nur ein und derselbe Spinor die Stelle von ψ einnimmt. Die Variationen nach den verschiedenen Spinoren ergeben die einzelnen Feldgleichungen. Für den Fall von Fermionen genügt folgender Ansatz unseren Forderungen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} = {} & \bar b^{\nu_1\ldots\nu_N}_{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_M}\left(\partial_{\dot\mu_0\nu_1}\, b^{\dot\mu_0\ldots\dot\mu_M}_{\nu_2\ldots\nu_N} - i\,\frac{mc}{\hbar}\, a^{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_M}_{\nu_1\ldots\nu_N}\right) + \bar a^{\nu_2\ldots\nu_N}_{\dot\mu_0\ldots\dot\mu_M}\left(\partial^{\dot\mu_0\nu_1}\, a^{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_M}_{\nu_1\ldots\nu_N} - i\,\frac{mc}{\hbar}\, b^{\dot\mu_0\ldots\dot\mu_M}_{\nu_2\ldots\nu_N}\right)\\ & + b^{\dot\nu_1\ldots\dot\nu_N}_{\mu_1\ldots\mu_M}\left(\partial_{\mu_0\dot\nu_1}\,\bar b^{\mu_0\ldots\mu_M}_{\dot\nu_2\ldots\dot\nu_N} + i\,\frac{mc}{\hbar}\,\bar a^{\mu_1\ldots\mu_M}_{\dot\nu_1\ldots\dot\nu_N}\right) + a^{\dot\nu_2\ldots\dot\nu_N}_{\mu_0\ldots\mu_M}\left(\partial^{\mu_0\dot\nu_1}\,\bar a^{\mu_1\ldots\mu_M}_{\dot\nu_1\ldots\dot\nu_N} + i\,\frac{mc}{\hbar}\,\bar b^{\mu_0\ldots\mu_M}_{\dot\nu_2\ldots\dot\nu_N}\right).\end{aligned} \tag{34}$$

$\mathfrak{L}$ ist offensichtlich reell als Summe eines Anteiles $\mathfrak{L}_1$, bestehend aus den beiden ersten Summanden, und eines konjugiert komplexen $\bar{\mathfrak{L}}_1$. Setzt man in der Variationsgleichung $\psi = \bar b$, so folgt (11), mit $\psi = \bar a$ (10), mit $\psi = b$ (22) und mit $\psi = a$ (21).

Für Bosonen ist die Forderung nicht voll erfüllbar. Mit $M = N = s$ machen wir folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} = {} & \bar{a}^{\nu_1\,\dots\,\nu_s}_{\dot\mu_1\,\dots\,\dot\mu_s}\left(\partial_{\dot\mu_0\nu_1}\, b^{\dot\mu_0\,\dots\,\dot\mu_s}_{\nu_2\,\dots\,\nu_s} + \partial^{\dot\mu_1\nu_0}\, b^{\dot\mu_2\,\dots\,\dot\mu_s}_{\nu_0\,\dots\,\nu_s} - 2\,i\,\frac{mc}{\hbar}\, a^{\dot\mu_1\,\dots\,\dot\mu_s}_{\nu_1\,\dots\,\nu_s}\right) \\ & + \bar{b}^{\nu_2\,\dots\,\nu_s}_{\dot\mu_0\,\dots\,\dot\mu_s}\left(\partial^{\dot\mu_0\nu_1}\, a^{\dot\mu_1\,\dots\,\dot\mu_s}_{\nu_1\,\dots\,\nu_s} - i\,\frac{mc}{\hbar}\, b^{\dot\mu_0\,\dots\,\dot\mu_s}_{\nu_2\,\dots\,\nu_s}\right) + \bar{b}^{\nu_0\,\dots\,\nu_s}_{\dot\mu_2\,\dots\,\dot\mu_s}\left(\partial_{\dot\mu_1\nu_0}\, a^{\dot\mu_1\,\dots\,\dot\mu_s}_{\nu_1\,\dots\,\nu_s} - i\,\frac{mc}{\hbar}\, b^{\dot\mu_2\,\dots\,\dot\mu_s}_{\nu_0\,\dots\,\nu_s}\right) \\ & + a^{\dot\mu_1\,\dots\,\dot\mu_s}_{\nu_1\,\dots\,\nu_s}\left(\partial_{\dot\mu_1\nu_0}\, \bar{b}^{\nu_0\,\dots\,\nu_s}_{\dot\mu_2\,\dots\,\dot\mu_s} + \partial^{\dot\mu_0\nu_1}\, \bar{b}^{\nu_2\,\dots\,\nu_s}_{\dot\mu_0\,\dots\,\dot\mu_s} + 2\,i\,\frac{mc}{\hbar}\, \bar{a}^{\nu_1\,\dots\,\nu_s}_{\mu_1\,\dots\,\mu_s}\right) \\ & + b^{\dot\mu_2\,\dots\,\dot\mu_s}_{\nu_0\,\dots\,\nu_s}\left(\partial^{\dot\mu_1\nu_0}\, \bar{a}^{\nu_1\,\dots\,\nu_s}_{\dot\mu_1\,\dots\,\dot\mu_s} + i\,\frac{mc}{\hbar}\, \bar{b}^{\nu_0\,\dots\,\nu_s}_{\dot\mu_2\,\dots\,\dot\mu_s}\right) + b^{\dot\mu_0\,\dots\,\dot\mu_s}_{\nu_2\,\dots\,\nu_s}\left(\partial_{\dot\mu_0\nu_1}\, \bar{a}^{\nu_1\,\dots\,\nu_s}_{\dot\mu_1\,\dots\,\dot\mu_s} + i\,\frac{mc}{\hbar}\, \bar{b}^{\nu_2\,\dots\,\nu_s}_{\dot\mu_0\,\dots\,\dot\mu_s}\right).\end{aligned}$$

Der Ausdruck ist offensichtlich reell, weil er sich als Summe $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \bar{\mathfrak{L}}_1$ darstellen läßt ($\mathfrak{L}_1$ sind die ersten drei Summanden). Die Variation nach $\psi = \bar{b}^{\nu_2\,\dots\,\nu_s}_{\dot\mu_0\,\dots\,\dot\mu_s}$ liefert (10), nach $\psi = \bar{b}^{\nu_0\,\dots\,\nu_s}_{\dot\mu_2\,\dots\,\dot\mu_s}$ (28), nach $\psi = b^{\dot\mu_2\,\dots\,\dot\mu_s}_{\nu_0\,\dots\,\nu_s}$ (21), nach $\psi = b^{\dot\mu_0\,\dots\,\dot\mu_s}_{\nu_2\,\dots\,\nu_s}$ (30). Variiert man dagegen nach $\psi = \bar{a}^{\nu_1\,\dots\,\nu_s}_{\dot\mu_1\,\dots\,\dot\mu_s}$, so folgt

$$\partial_{\dot\mu_0\nu_1}\, b^{\dot\mu_0\,\dots\,\dot\mu_s}_{\nu_2\,\dots\,\nu_s} + \partial^{\dot\mu_1\nu_0}\, b^{\dot\mu_2\,\dots\,\dot\mu_s}_{\nu_0\,\dots\,\nu_s} - 2\,i\,\frac{mc}{\hbar}\, a^{\dot\mu_1\,\dots\,\dot\mu_s}_{\nu_1\,\dots\,\nu_s} = 0\,, \tag{36}$$

bei Variation nach $\psi = a^{\dot\mu_1\,\dots\,\dot\mu_s}_{\nu_1\,\dots\,\nu_s}$ folgt

$$\partial_{\dot\mu_1\nu_0}\, \bar{b}^{\nu_0\,\dots\,\nu_s}_{\dot\mu_2\,\dots\,\dot\mu_s} + \partial^{\dot\mu_0\nu_1}\, \bar{b}^{\nu_2\,\dots\,\nu_s}_{\dot\mu_0\,\dots\,\dot\mu_s} + 2\,i\,\frac{mc}{\hbar}\, \bar{a}^{\nu_1\,\dots\,\nu_s}_{\dot\mu_1\,\dots\,\dot\mu_s} = 0\,. \tag{37}$$

Diese Variationsgleichungen stimmen nicht mit (11) und (29) bzw. (22) und (31) überein. Für die physikalischen Aussagen, die sich aus den Feldgleichungen ergeben, bedeutet es aber keine Änderung, wenn man (11) und (29) durch (36), das die Summe von (11) und (29) ist, ersetzt und ebenfalls (22) und (31) durch ihre Summe (37) ersetzt. Dies wird offensichtlich, wenn man, was bei Bosonen immer möglich ist, zu den Feldgleichungen in Tensorform übergeht. In diesem Falle entsteht aus (11) und (29) übereinstimmend mit dem Ergebnis aus (36) eine einzige Gleichung, nämlich:

$$-\,2\,\partial_{r_0}\, G^{r_0 r_1 r_2 \cdots r_s} = i\,\frac{mc}{\hbar}\, A^{r_1\cdots r_s}\,; \tag{38}$$

aus (22), (31) und (37) übereinstimmend die zu (38) konjugiert komplexe Gleichung. Dabei ist $G^{r_0 r_1 r_2\cdots r_s}$ ein Tensor, der in (r_0, r_1) antisymmetrisch, in allen Indexpaaren (r_K, r_L) für $K, L = 2, 3, \dots s$ symmetrisch und in jedem Indexpaar spurfrei ist, $A^{r_1\cdots r_s}$ ist ein in jedem Indexpaar symmetrischer und spurfreier Tensor.

Der Verf. dankt Herrn H. Donnert für die Durchführung der Rechnungen über die Lagrange-Funktion.